Александр Александрович Фомин
к 65-летию со дня рождения

Александр Александрович Фомин родился 4 мая 1949 года в деревне Александровка Красногорского района Московской области в семье военнослужащего. В 1966 году он окончил с серебряной медалью вторую математическую школу, выпуск профессора Евгения Борисовича Дынкина. В 1971 году А. А. Фомин окончил с отличием МГПИ им. В. И. Ленина и был оставлен в аспирантуре под руководством профессора Леонида Яковлевича Куликова. С 1974 года по настоящее время Александр Александрович работает на кафедре алгебры МПГУ, являясь заведующим этой кафедры с 1989 года.

Кандидатскую диссертацию на тему «Тензорное произведение абелевых групп без кручения» А. А. Фомин защитил в 1976 году, официальными оппонентами были А. Х. Лифшиц и А. П. Мишина. В этой диссертации были вычислены матрицы Куроша—Дэрри тензорного произведения двух абелевых групп без кручения конечного ранга по матрицам сомножителей. Кроме того, А. А. Фомин исследовал тензорные степени абелевой группы без кручения A ранга n и p-ранга k для простого числа p. Если $k < n$, то тензорная степень $\bigotimes^{k+1} A$ имеет p-делимую подгруппу ранга $\binom{n}{k+1}$, где $\binom{n}{k+1}$ — число сочетаний из n по $k+1$.

Любой p-базис группы A из k элементов может быть дополнен до базиса группы A из n элементов. Дополнительные $n-k$ элементов линейно выражаются через элементы p-базиса с целыми p-адическими коэффициентами в p-адическом пополнении группы A. Если эти коэффициенты в совокупности алгебраически независимы над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то тензорные степени $\bigotimes^{s} A$, где $s < k+1$, являются p-редуцированными и ранг p-делимой части группы $\bigotimes^{k+1} A$ в точности равен $\binom{n}{k+1}$.

Недавно М. Дугас, К. Асивес и Б. Вагнер показали, что условие алгебраической независимости существенно. Они построили в [31] пример группы A с $n = 4$, $k = 2$ и с алгебраическими p-адическими коэффициентами, такой что $A \otimes A$ не является p-редуцированной.

В [5, 7, 11, 12] А. А. Фомин выделяет и изучает классы абелевых групп без кручения конечного ранга, такие, как группы, у которых любая подгруппа бесконечного индекса свободна [5], группы, у которых любая собственная сервантная подгруппа свободна [7], группы с одним τ-адическим соотношением [11], группы ранга 3 [12]. В [8, 9] он распространяет двойственность Уорфилда и двойственность Арнольда на более широкие классы абелевых групп без кручения конечного ранга. Интересно, что результаты статьи [9] были также независимо получены У. Уиклессом и Ч. Винсонхалером [32], а также позднее использовались С. Брязом и Ф. Шульцем [33] для распространения так называемой двойственности Фомина—Уиклесса [20] на класс самомалых групп.

А. А. Фомин ввёл в [11] понятие τ-адического числа, где τ — некоторый тип Бэра. Произведение колец целых p-адических чисел

$$\hat{\mathbf{Z}} = \prod_p \hat{\mathbf{Z}}_p$$

по всем простым числам p называется кольцом полиадических чисел. Кольцо

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} \otimes \prod_p \hat{\mathbf{Z}}_p$$

является также векторным пространством над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Каждому элементу $\alpha \in \mathbf{K}$ ставится в соответствие некоторый тип Бэра $\mathrm{type}(\alpha)$, при этом α является делителем β тогда и только тогда, когда $\mathrm{type}(\alpha) \leqslant \mathrm{type}(\beta)$. Любой конечно порождённый идеал $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ кольца $\mathbf{K}$ порождается одним элементом $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = \langle \alpha \rangle$, где α — наибольший общий делитель элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}$. Этот идеал имеет вид

$$I_\tau = \{\gamma \in \mathbf{K} \mid \mathrm{type}(\alpha) \geqslant \tau\},$$

где $\tau = \mathrm{type}(\alpha)$. Фактор-кольцо $\mathbf{Q}_\tau = \mathbf{K}/I_\tau$ называется кольцом τ-адических чисел. Кольцо τ-адических чисел одновременно является векторным пространством над полем $\mathbf{Q}$ и модулем над кольцом $\mathbf{K}$.

Докторскую диссертацию на тему «Абелевы группы без кручения конечного ранга с точностью до квазиизоморфизма» А. А. Фомин защитил в 1992 году в Институте математики Сибирского отделения Академии наук, оппоненты А. В. Яковлев, А. В. Михалёв и Е. А. Палютин. В этой диссертации показано, что категория коредуцированных абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов является двойственной следующей категории пар пространств. Объектами этой категории служат все возможные пары векторных пространств (V, W) над полем рациональных чисел, такие что W имеет вид

$$W = \mathbf{Q}_{\tau_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}_{\tau_n},$$

а V является конечномерным подпространством пространства W, которое порождает W как модуль над кольцом $\mathbf{K}$. Морфизмами из пары $V_1 \subset W_1$ в пару $V_2 \subset W_2$ являются $\mathbf{K}$-модульные гомоморфизмы $W_1 \to W_2$, которые переводят V_1 в V_2.

В дальнейшем, не оставляя работу в качестве заведующего кафедрой алгебры МПГУ, А. А. Фомин работает также в университете города Вюрцбург с профессором Отто Муцбауэром и в университете штата Коннектикут с профессором Биллом Уиклессом.

Совместные работы А. А. Фомина и О. Муцбауэра [15, 18] посвящены абелевым группам без кручения A конечного ранга с нетривиальным эндоморфизмом α. В этом случае группа A имеет структуру модуля над кольцом $\mathbf{Z}[\alpha]$. При этом эндоморфизм α, будучи корнем характеристического многочлена с целыми коэффициентами, может быть отождествлён с алгебраическим числом. Кольца вида $\mathbf{Z}[\alpha]$ либо являются дедекиндовыми, либо квазиравны дедекиндовым кольцам. В [15, 18], в частности, показано, что многие результаты теории абелевых групп могут быть перенесены на модули над дедекиндовыми кольцами.

Двойственность Фомина, построенная в его докторской диссертации, нашла приложения в его совместных работах с У. Уиклессом [17, 19, 20]. Ранее У. Уиклесс и С. Глаз [34] ввели некоторый класс смешанных групп $\mathcal{G}$, для которого У. Уиклесс построил категорную эквивалентность [35]. Категория смешанных групп $\mathcal{G}$ с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов оказалась эквивалентной некоторой категории абелевых групп без кручения конечного ранга также с квазигомоморфизмами [35]. Всякая группа $G \in \mathcal{G}$ вкладывается в прямое произведение конечных p-групп T_p по всем простым числам p: $G \subset \prod\limits_p T_p$. Тензорное умножение на поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$ даёт пару пространств

$$\mathbf{Q} \otimes G \subset \mathbf{Q} \otimes \prod_p T_p,$$

к которой можно применить двойственность Фомина. В [17] показано, что эквивалентность Уиклесса является композицией двойственности Фомина и двойственности Уорфилда. Работа [19] представляет собой наиболее полное исследование групп класса $\mathcal{G}$. В [20] А. А. Фомин и У. Уиклесс распространили понятие факторно делимой группы без кручения на случай смешанных групп. В частности, группы класса $\mathcal{G}$ оказались факторно делимыми в этом новом смысле. Основным результатом статьи [20] является построение функтора двойственности между категорией $\mathcal{QD}$ всех факторно делимых групп в смысле Фомина—Уиклесса с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов и категорией $\mathcal{QTF}$ всех абелевых групп без кручения конечного ранга также с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. На пересечении этих классов $\mathcal{QD} \cap \mathcal{QTF}$ двойственность Фомина—Уиклесса совпадает с двойственностью Арнольда для классических факторно делимых групп без кручения.

В [21, 22] А. А. Фомин замечает, что группы класса $\mathcal{G}$ являются естественным образом модулями над некоторым коммутативным кольцом, которое получило название кольца псевдорациональных чисел. Как модули над этим кольцом группы класса $\mathcal{G}$ конечно порождённые.

В [24—26] А. А. Фомин определяет три категории: $\mathcal{D}$, $\mathcal{TF}$ и $\mathcal{S}$. Объектами категории $\mathcal{D}$ являются факторно делимые группы с выделенными базисами, объектами категории $\mathcal{TF}$ являются группы без кручения конечного ранга с выделенными базисами, объектами категории $\mathcal{S}$ являются конечные последовательности элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \hat{\mathbf{Z}}_p$. Морфизмами в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{TF}$ служат обычные гомоморфизмы групп, для которых матрицы относительно выделенных базисов состоят из целых чисел. Морфизмами из объекта $a_1, \ldots, a_n$ в объект $b_1, \ldots, b_k$ категории $\mathcal{S}$ являются пары (φ, T), где $\varphi\colon \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \to \langle b_1, \ldots, b_k \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ — гомоморфизм $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей, порождённых этими элементами, а T — матрица размера $k \times n$ с целочисленными элементами, такие что имеет место следующее матричное равенство:

$$(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = (b_1, \ldots, b_k)T.$$

Эти три категории связаны следующей коммутативной диаграммой функторов:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ \mathcal{TF} \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathcal{D} \arrow[ul, shift left] \end{tikzcd}.$$

При этом $\mathcal{TF} \leftrightarrow \mathcal{S}$ и $\mathcal{TF} \leftrightarrow \mathcal{D}$ являются двойственностями, а $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{D}$ — эквивалентность. Эта теорема даёт удобный способ задания групп. Любая конечная последовательность элементов конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля определяет одновременно две группы из классов $\mathcal{TF}$ и $\mathcal{D}$, которые являются взаимно двойственными в смысле двойственности Фомина—Уиклесса. В частности, этот способ был опробован в [25] при анализе известных групп А. Л. С. Корнера с аномальными прямыми разложениями.

Отдельно отметим статью А. А. Фомина [23], в которой изложена история развития теории абелевых групп в России в двадцатом веке.

Помимо научной работы, Александр Александрович много занимался математическими олимпиадами для школьников и студентов университетов. Он руководил командой СССР на Международной математической олимпиаде школьников с 1984 по 1994 год. В этот период команда четыре раза занимала первое место в командном зачёте в 1984, 1986, 1988 и 1991 годах. А. А. Фомин вместе с Марией Фальк де Лосада основал национальную университетскую олимпиаду по математике в Колумбии, а также Иберoамериканскую университетскую математическую олимпиаду в 1998 году. Обе эти олимпиады ежегодно проводятся по настоящее время. А. А. Фомин неоднократно участвовал в Международном математическом соревновании студентов университетов в качестве руководителя команды Колумбии и команды МПГУ. Летом 2013 года он участвовал в проведении 54-й Международной математической олимпиады в качестве координатора в городе Санта-Марта в Колумбии.

За двадцать пять лет руководства кафедрой алгебры МПГУ Александр Александрович сумел создать очень высококвалифицированный коллектив. На кафедре работают 5 докторов наук, в том числе А. В. Гришин, Е. И. Компанцева, А. Н. Красильников, А. В. Царёв. Е. Е. Ширшова подготовила докторскую диссертацию к защите. Все преподаватели имеют ученые степени и активно ведут научные исследования на самом высоком уровне. Под руководством А. А. Фомина были защищены 2 докторских и 5 кандидатских диссертаций по теории абелевых групп.

Редакционная коллегия, кафедра высшей алгебры Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, кафедра высшей алгебры Московского педагогического государственного университета, кафедра алгебры Научно-исследовательского Томского государственного университета поздравляют заведующего кафедрой алгебры Московского педагогического государственного университета доктора физико-математических наук, профессора Александра Александровича Фомина с шестидесятипятилетием!

Желаем своему коллеге крепкого здоровья, дальнейшей плодотворной научной и педагогической деятельности, талантливых учеников, благополучия и исполнения всех желаний!

Список литературы

[1] Фомин А. А. Тензорное произведение абелевых групп без кручения // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 4. — С. 869—878.

[2] Фомин А. А. Тензорное произведение счётных абелевых групп без кручения // Математические исследования. Т. 30. Кольца и модули. — Кишинёв: Штиинца, 1976. — С. 97—203.

[3] Фомин А. А. Тензорное произведение групп без кручения p-ранга 1. — Деп. в ВИНИТИ 1976. — No. 4, 4A153.

[4] Фомин А. А. Z-адическое пополнение и тензорное произведение абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1982. — С. 222—232.

[5] Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. — 1984. — Т. 36, № 2. — С. 179—187.

[6] Куликов Л. Я., Фомин А. А. Девятый Всесоюзный симпозиум по теории групп // УМН. — 1985. — Т. 40, № 6/246. — С. 167—171.

[7] Фомин А. А. Сервантно свободные группы // Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 145—164.

[8] Фомин А. А. Двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27. — С. 117—127.

[9] Фомин А. А. Инварианты и двойственность в некоторых классах абелевых групп без кручения конечного ранга // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 1. — С. 63—83.

[10] Фомин А. А. О модуле τ-соотношений абелевой группы без кручения конечного ранга // Проблемы чистой и прикладной математики. — Тула: Приокск. книжн. изд-во, 1988. — С. 54—58.

[11] Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28, № 1. — С. 83—104.

[12] Фомин А. А. Абелевы группы без кручения ранга 3 // Матем. сб. — 1989. — Т. 180, № 9. — С. 1155—1170.

[13] Фомин А. А., Рычков С. В. Абелевы группы со счётным числом подгрупп // Абелевы группы и модули. Т. 10. — Томск, 1991. — С. 91—105.

[14] Fomin A. A. The category of quasi-homomorphisms of Abelian torsion-free groups of finite rank // Proc. of the Internat. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev. Pt. 1. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 91—111.

[15] Fomin A. A., Mutzbauer O. Abelian alpha-irreducible torsion-free groups // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22. — P. 3741—3754.

[16] Fomin A. A. Finitely presented modules over the ring of universal numbers // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf. on Abelian Groups. August 1—7, 1993. Oberwolfach, Germany. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 109—120.

[17] Fomin A. A., Wickless W. J. Categories of mixed and torsion-free finite rank Abelian groups // Abelian Groups and Modules. Proc. of Padova Conf., Padova, Italy, June 23—July 1, 1994. — Springer Netherlands, 1995. — (Math. Its Appl.; Vol. 343). — P. 185—192.

[18] Fomin A. A., Mutzbauer O. Types in Abelian groups with a prescribed endomorphism // Bull. Greek Math. Soc. — 1995. — Vol. 37. — P. 49—65.

[19] Fomin A. A., Wickless W. J. Self-small mixed Abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 11. — P. 3563—3580.

[20] Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 1. — P. 45—52.

[21] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Int. Conf. in Dublin, August 10—14, 1998. — Basel: Birkhäuser, 1999. — (Trends Math.). — P. 87—100.

[22] Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Abelian Groups, Rings and Modules. AGRAM 2000 Conf., July 9—15, 2000, Perth, Western Australia. — Providence: Amer. Math. Soc., 2001. — (Contemp. Math.; Vol. 273). — P. 117—128.

[23] Fomin A. A. Abelian groups in Russia // Rocky Mountain J. Math. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 1161—1180.

[24] Фомин А. А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 223—244.

[25] Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — P. 147—168.

[26] Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322, no. 7. — P. 2544—2565.

[27] Фомин А. А., Куликов Л. Я., Москаленко А. И. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993.

[28] Фомин А. А., Кузнецова Г. М. Международные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 1997.

[29] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 153—167.

[30] Фомин А. А. Числовые кольца и модули над ними. — М.: МПГУ, Прометей, 2013.

[31] Dugas M., Aceves K., Wagner B. Localizations of tensor products // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2014. — Vol. 131. — P. 237—258.

[32] Vinsonhaler C., Wickless W. Dualities for torsion-free Abelian groups of finite rank // J. Algebra. — 1990. — Vol. 128, no. 2. — P. 474—487.

[33] Breaz S., Schultz P. Dualities for self-small groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2012. — Vol. 140. — P. 69—82.

[34] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 4. — P. 1161—1176.

[35] Wickless W. J. A functor from mixed groups to torsion-free groups // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf. on Abelian Groups. August 1—7, 1993. Oberwolfach, Germany. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 407—417.